

$$(a + b)^n$$

### اتحادهای

اتحادهای تساوی‌های جبری هستند که به ازای هر مقدار عددی که به جای متغیرهایشان قرار دهیم همواره برقرار باشند. به عنوان مثال تساوی  $x(x-3) = x^2 - 3x$  به ازای هر مقدار  $x$  برابر است. لذا یک اتحاد می‌باشد. اما تساوی  $x^2 - 4x = -4$  فقط به ازای  $x=2$  برقرار است. بنابراین اتحاد نیست.

### اتحادهای مهم جبری

#### اتحاد مربع دو جمله‌ای

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

#### اتحاد مربع یک سه جمله‌ای

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

#### اتحاد مزدوج

$$(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$$

#### اتحاد جمله مشترک

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

#### اتحاد چاق و لاغر

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

#### اتحاد مکعب دو جمله‌ای

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

مثال ۱: درستی اتحادهای زیر را اثبات کنید.

$$۱) a^r + b^r = (a + b)^r - r ab$$

$$۲) a^r + b^r = (a - b)^r + r ab$$

$$۳) (a + b)^r - (a - b)^r = r ab$$

$$۴) a^r + b^r = (a + b)^r - r ab(a + b)$$

$$۵) a^r - b^r = (a - b)^r + r ab(a - b)$$

مثال ۲: اگر  $x + y = 7$  و  $xy = 10$  و  $x > y$  باشد آنگاه حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

۱)  $x^2 + y^2 =$

۲)  $x^3 + y^3 =$

۳)  $x - y =$

۴)  $x^4 + y^4 =$

۵)  $x^3 - y^3 =$

۶)  $\sqrt{x} + \sqrt{y} =$

مثال ۳: حاصل عبارات زیر را به کمک اتحادها بدست آورید.

۱)  $۲۳۵^۲ - ۲۳۰^۲ - ۵^۲ =$

۲)  $۸۵۰^۲ - ۷۵۰^۲ =$

۳)  $۴۹۷ \times ۵۰۳ =$

۴)  $۹۹^۳ =$

مثال ۴: اگر  $a + b + c = ۱۰$  و  $a^۲ + b^۲ + c^۲ = ۵۰$ ، حاصل  $ab + ac + bc$  چقدر است؟

مثال ۵: اگر  $a + b - c = 6$  و  $a^2 + b^2 + c^2 = 110$  باشد حاصل  $ac + bc - ab$  چقدر است؟

مثال ۶: اگر  $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$  باشند و  $a^2 + 2bc = 63$  و  $b^2 + 2ac = 48$  و  $c^2 + 2ab = 59$  آنگاه حاصل  $a + b + c$  کدام است؟

مثال ۷: اگر  $a - b = 8$  و  $ab = 6$  باشد، حاصل  $a^3 - b^3$  و  $a^2 + b^2$  کدام است؟

مثال ۸: اگر  $x + \frac{1}{x} = 2$  حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

۱)  $x^2 + \frac{1}{x^2} =$

۲)  $2x^2 + \frac{2}{x^2} =$

۳)  $\sqrt{x} + \sqrt{\frac{1}{x}} =$

مثال ۹: اگر  $x - \frac{4}{x} = -2$  باشد حاصل  $x^3 - \frac{64}{x^3}$  کدام است؟

### مربع کامل کردن عبارات درجه دوم

برای مربع کامل کردن یک عبارت درجه دوم به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱- ابتدا ضریب  $x^2$ ، را یک می‌کنیم. (یعنی اگر ضریب آن مثلاً عدد ۲ باشد کل معادله را بر ۲ تقسیم می‌کنیم.)

۲- ضریب جمله  $x$  را بر ۲ تقسیم کرده و سپس به توان ۲ می‌رسانیم.

۳- عدد بدست آمده از قسمت قبل را به معادله اضافه و کم می‌کنیم.

مثال ۱۰: عبارات جبری زیر را مربع کامل کنید.

۱)  $x^2 - 4x = 0$



$$۲) x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$۳) x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$۴) x^2 - x - 1 = 0$$

$$۵) 2x^2 - x - 1 = 0$$

$$۶) 4x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$۷) -2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$۸) 6x^2 + 7x + 1 = 0$$

۹)  $۲t^۲ + t = ۲$

۱۰)  $r^۲ + ۳r = ۳$

۱۱)  $x^۲ + ۲x = ۲۴$

۱۲)  $x^۲ + ax + b = ۰$

۱۳)  $-۳x^۲ + ۴x = -۷$

۱۴)  $x^۲ - ۳x = -۱$

مثال ۱۱: اگر  $(x - y - 12)^2 + (x - 4)^2 = 0$  باشد حاصل  $xy$  کدام است؟

➤ نکته:

مثال ۱۲: اگر  $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$  باشد حاصل  $x + y$  کدام است؟

مثال ۱۳: اگر  $a^2 + b^2 = 7ab$  باشد، حاصل  $\frac{a-b}{a+b}$  چقدر است؟ ( $a > b > 0$ )

تجزیه عبارات جبری

تجزیه به کمک فاکتورگیری:

در این روش از بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک جملات جبری فاکتور می‌گیریم.

مثال ۱۴:

۱)  $۲ab + ۳b =$

۲)  $۵a^۲b^۳ + ۱۰a^۳b^۲ =$

۳)  $۶x^۲y - ۵xy + ۳xy^۲ =$

۴)  $۴a^۲(a + b) + ۸a(a + b) =$

۵)  $۳(x - y)^۲ - (x - y) =$

روش دسته‌بندی و فاکتورگیری:

اگر تمام جمله‌های موجود در یک عبارت دارای عامل مشترک نباشند، جملات را دسته‌بندی کرده و در هر دسته از عامل مشترک فاکتور می‌گیریم، به طوری که در مرحله‌ی بعد نیز فاکتور مشترکی ظاهر شود.

مثال ۱۵:

۱)  $ac + bc + ad + bd =$

۲)  $xy - zu + xz - uy =$

۳)  $۶ax + ۹ay - ۴bx - ۶by =$

۴)  $a^5 - a^4 + a^3 - a^2 =$

تجزیه به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای:

مثال ۱۶:

۱)  $x^2 + 4x + 4 =$

۲)  $9x^2 + 6x + 1 =$

۳)  $2z - z^2 - 1 =$

۴)  $4x^2 + 12xy + 9y^2 =$

۵)  $25x^2 - 30xy + 9y^2 =$

تجزیه به کمک اتحاد مزدوج:

مثال ۱۷:

۱)  $(x + 2y)^2 - (x - 2y)^2 =$

۲)  $x^2 - 9 =$

۳)  $x^2 - 16 =$

۴)  $4x^2 - 9y^2 =$

۵)  $4 - (2x - 3)^2 =$

تجزیه به کمک اتحاد جمله‌ی مشترک:

مثال ۱۸:

۱)  $x^2 + 7x + 12 =$

۲)  $x^2 - 5x + 6 =$

۳)  $x^2 - 3x + 2 =$

۴)  $4x^2 - 20x + 21 =$

۵)  $9x^2 - 9xy - 10y^2 =$

۶)  $2x^2 + 7x + 3 =$

۷)  $6x^2 - x - 1 =$

۸)  $x^2 - 3x^2 + 2 =$

۹)  $x^2 - 8x + 12 =$

۱۰)  $x - 4\sqrt{x} + 3 =$

۱۱)  $x^2 - 5x^2 + 4 =$



تجزیه به کمک اتحاد چاق ولاغر:

مثال ۱۹:

۱)  $8a^3 + b^3 =$

۲)  $27a^3 - 1 =$

۳)  $64x^3 - 27 =$

تجزیه با افزودن و کاستن:

در این روش جمله‌ای را به عبارت اضافه و از آن کم می‌کنیم. سپس به کمک اتحادها عبارت جبری را تجزیه می‌کنیم.

۱)  $x^4 + 4 =$

۲)  $a^4 + a^2b^2 + b^4 =$

مثال ۲۰: عبارات زیر را تجزیه و ساده کنید.

۱)  $8x^2 + 8x + 2 =$

۲)  $2 \cdot x^2 - 10 \cdot x + 125 =$

۳)  $3x^2 - 27y^2 =$

۴)  $x^2 - 2x - y^2 - 1 =$

۵)  $a^6 - b^6 =$

۶)  $(x+2)(x+3)(x+5)(x+4) - 120 =$

$$۷) (x^2 + 3x)^2 - 2(x^2 + 3x) - 8 =$$

$$۸) (x^2 - 5x)^2 - 36 =$$

$$۹) a^4 + a^3 + a^2 - 2a - 3 =$$

$$۱۰) \frac{x^2 - y^2}{y^2x - yx^2} =$$

$$۱۱) \frac{x}{\frac{1}{x} + 1} + \frac{x}{x + 1} =$$

$$۱۲) \frac{m^2 + n^2 - 2mn}{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}} : \frac{m+n}{mn} =$$

$$۱۳) \frac{x^2 - 2x - 3}{6x^2 + 7x - 3} : \frac{x^2 - x - 2}{2x^2 - x - 6} =$$