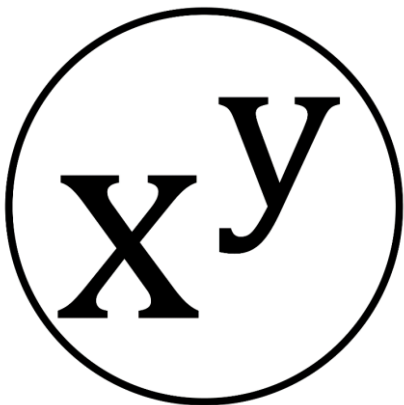
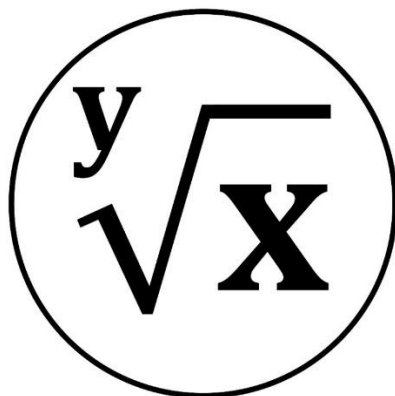


Exponentials & Radicals

توان و رادیکال


$$x^y$$


$$\sqrt[y]{x}$$

ریشه‌ی طبیعی یک عدد

اگر $a \geq 0$ و $n \in \mathbb{N}$ آنگاه عدد منحصر به فردی مانند $b \geq 0$ وجود دارد که $b^n = a$.

در این صورت مقدار b را با $\sqrt[n]{a}$ نشان می‌دهیم و آن را ریشه‌ی n ام عدد a می‌نامیم. عدد n که بزرگتر از یک است فرجه نامیده می‌شود.

نکته: اگر n فرد باشد $\sqrt[n]{a}$ همواره وجود دارد. ولی اگر n زوج باشد، ریشه‌ی n ام اعداد منفی در مجموعه‌ی اعداد حقیقی تعریف نمی‌شود.

نکته: اگر n زوج باشد و $b^n = a$ ، آنگاه $(-b)^n = a$ ، پس $-b$ هم ریشه‌ی n ام a است.

مثال ۱: مقدار عبارات زیر را بدست آورید.

$$۱) \sqrt[3]{-23 - \sqrt{18 + \sqrt[3]{-8}}} =$$

$$۲) \sqrt[3]{0/125} - 3\sqrt[3]{-0/216} =$$

قواعد ریشه‌گیری

اگر a و b دو عدد حقیقی و $\sqrt[n]{a}$ و $\sqrt[n]{b}$ قابل تعریف باشند، آنگاه: ($m, n \geq 2$)

$$۱) \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$۲) (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$۳) \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

$$۴) \sqrt[n]{a^n} = a \quad (\text{اگر } n \text{ فرد باشد})$$

$$۵) \sqrt[n]{a^n} = |a| \quad (\text{اگر } n \text{ زوج باشد})$$

$$۶) \sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b} \quad (\text{اگر } n \text{ زوج و } a \text{ و } b \text{ نامنفی باشند})$$

۷) $\sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a}$ (اگر m یا n زوج باشد، a نامنفی است)

۸) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ (اگر m یا n زوج باشد، a نامنفی است.)

۹) $\sqrt[n]{a} \sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$ (اگر m یا n زوج باشد، a نامنفی است)

مثال ۲: حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

۱) $\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} =$

۲) $\sqrt[5]{-32} =$

۳) $\sqrt[4]{(-5)^4} =$

۴) $4\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x^2} =$
($x < 0$)

۵) $\sqrt{3} \times \sqrt{27} =$

۶) $\sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{4} =$

۷) $\sqrt[5]{2 - \sqrt{5}} \times \sqrt[5]{2 + \sqrt{5}} =$

۸) $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}} =$

۹) $\frac{\sqrt[6]{320}}{\sqrt[6]{5}} =$

۱۰) $\frac{\sqrt{12} \times \sqrt{15}}{\sqrt{20}} =$

۱۱) $\sqrt[3]{105} =$

۱۲) $\sqrt[5]{64} =$

۱۳) $\sqrt[4]{112} =$

۱۴) $\sqrt{98} =$

$$۱۵) \sqrt[3]{\sqrt{5}} =$$

$$۱۶) \sqrt[4]{\sqrt[5]{10}} =$$

$$۱۷) \sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{5}}} =$$

$$۱۸) \sqrt[3]{\sqrt[5]{-2}} =$$

$$۱۹) \sqrt{-x} + \frac{\sqrt[3]{x^3} + 2x}{\sqrt[4]{x^4} - 2x} =$$

$$۲۰) \sqrt[3]{16} \times \sqrt[6]{16} =$$

$$۲۱) \sqrt[3]{2-\sqrt{3}} \times \sqrt[6]{7+4\sqrt{3}} =$$

$$۲۲) 2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2\sqrt{2}}} \times 2\sqrt[6]{4\sqrt[4]{2^{13}}} =$$

$$۲۳) \sqrt{6\sqrt[3]{72\sqrt[4]{27\sqrt{9}}}} =$$

$$۲۴) \sqrt[4]{(-3)^4} + \sqrt[3]{-125} + \sqrt{6^2} - \sqrt[5]{243} =$$

$$۲۵) \sqrt[5]{-1} + \sqrt[3]{\frac{1}{216}} - \sqrt[4]{0/0016} + \sqrt{(-2)^2} =$$

$$۲۶) \frac{ab^{-2}(a^{-1}b^2)^4(ab^{-1})^2}{a^{-2}b(a^2b^{-1})^3a^{-1}b} =$$

$$۲۷) \left(\frac{11 - \sqrt{7} + \sqrt{77} - \sqrt{11}}{7 + \sqrt{77}} \right)^2 =$$

$$۲۸) \frac{1}{\sqrt{\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250}}} =$$

$$۲۹) (\sqrt{6} - \sqrt{5})^{\sqrt{3}-1} \times (\sqrt{6} + \sqrt{5})^{\sqrt{3}+1} =$$

$$۳۰) \sqrt{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{a}{b}} \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \times a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} =$$

$$۳۱) \frac{\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18}}{\sqrt{50} - \sqrt{8}} =$$

نکته: فرض کنید m و n دو عدد طبیعی باشند که $n > m > 1$.

$$۱- اگر $a > 1$ آنگاه $1 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[m]{a} < a$$$

$$۲- اگر $0 < a < 1$ آنگاه $a < \sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a} < 1$$$

از دو عبارت بالا می توان نتیجه گرفت:

$$۱- اگر $a > 1$ آنگاه$$

$$a > \sqrt{a} > \sqrt[3]{a} > \dots > \sqrt[n]{a} > 1$$

$$۲- اگر $0 < a < 1$ آنگاه:$$

$$0 < a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \dots < \sqrt[n]{a} < 1$$

مثال ۳:

$$12^{x+3} = 153$$

$$\Rightarrow ? > x > ?$$

A) $-4 < x < -3$

B) $-3 < x < -2$

C) $-2 < x < -1$

D) $-1 < x < 0$

E) $0 < x < -1$

مثال ۴:

$$\frac{(3^4 + 1)(3^4 - 1) + 1}{3^6} = ?$$

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 3 D) 9 E) 27

مثال ۵:

$$\frac{3^{21} \cdot 3^{21} \cdot 3^{21} \cdot 3^{21}}{9^3 \cdot 9^3} = (ab)^{ba}$$

In the above equation, (ab) and (ba) are two-digits numbers.

So, what is the result of a.b according to this equation?

A) 9

B) 11

C) 8

D) 14

E) 18

مثال ۶:

$$\left. \begin{array}{l} 2^x = 125 \\ 2^y = 25 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2x - y}{3x + y} = ?$$

مثال ۷:

$$\left. \begin{array}{l} 3^x = 64 \\ 9^y = 32 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2x + y}{x - y} = ?$$

مثال ۸:

$$\left. \begin{array}{l} 3^a = 25 \\ 5^b = 150 \\ 7^c = 14 \end{array} \right\} \Rightarrow ? < ? < ?$$

مثال ۹:

$$\left. \begin{array}{l} 2^x = 18 \\ 4^y = 65 \\ 5^z = 120 \end{array} \right\} \Rightarrow ? > ? > ?$$

مثال ۱۰:

$$\frac{27^{2n} - 9^{3n+1}}{3^{6n-1}} - \frac{4^{3n} - 8^{2n-1}}{2^{6n-3}} = ?$$

- A) 32
- B) -31
- C) -16
- D) 16
- E) $\frac{43}{24}$

کله نکته:

مثال ۱۱:

$$x \in \mathbb{R}$$

$$(x^2 + 2)^{x^2 - 2x} = 1 \Rightarrow \sum x = ?$$

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

مثال ۱۲:

$$(x + 2)^{x^2 - x - 6} = 1 \Rightarrow \sum x = ?$$

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

مثال ۱۳:

$$x > 0$$

$$\frac{x^{2a} - 4}{x^a + 2} : \frac{x^a - 2}{x^4} = (0.2)^{-4} \Rightarrow x = ?$$

- A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

مثال ۱۴:

$$2 \cdot 3^{x+1} - 6 \cdot 3^x + 5 \cdot 3^{x-2} = 405$$

$$\Rightarrow x = ?$$

- A)4 B)5 C)6 D)7 E)8

مثال ۱۵:

$$\frac{2^{x+1} + 5 \cdot 2^{x-1} + 3 \cdot 2^{x-2}}{2^{x+2} + \frac{1}{5} \cdot 2^x} = ?$$

- A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{5}{2}$ D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

مثال ۱۶:

$$2^x = 3 \Rightarrow 6^{\frac{1}{x+1}} = ?$$

- A) 3 B) 2 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{6}$

مثال ۱۷:

$$\left. \begin{array}{l} 3^a = 15^{a-1} \\ 6^a = 10^{a+1} \end{array} \right\} \Rightarrow 3^a = ?$$

- A) 115 B) 120 C) 135 D) 150 E) 180

مثال ۱۸:

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} - (16)^{\frac{3}{4}} + (-27)^{-\frac{1}{3}}}{\left(\frac{9}{25}\right)^{\frac{1}{2}} + (125)^{-\frac{1}{3}}} = ?$$

مثال ۱۹:

$$\left. \begin{array}{l} 3^y = \sqrt{7} \\ 7^x = \sqrt{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{81^y}{49^{x+1}} = ?$$

مثال ۲۰:

$$\frac{\sqrt[4]{5^3 \sqrt{5} \sqrt{5}}}{\sqrt{5}} = \sqrt[8]{a} \Rightarrow a = ?$$

مثال ۲۱:

$$x \in \mathbb{Z}$$

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{3x} > (81)^{11} \Rightarrow \max(x) = ?$$

- A) -6 B) -2 C) -5 D) 4 E) 5

مثال ۲۲:

$$4^{2-\frac{x}{2}} \leq 1 \leq 3^{6-x}$$

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sum x = ?$$

- A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

مثال ۲۳:

$$\left. \begin{array}{l} a = 1 + 3^x \\ b = 1 - 3^{-x} \end{array} \right\} \Rightarrow b = ?$$

A) $\frac{a-1}{a-2}$

B) $\frac{a-2}{a-1}$

C) $\frac{a-2}{a}$

D) $\frac{a-1}{a}$

E) $\frac{2-a}{a-1}$

مثال ۲۴:

$$\frac{1 + 2^{x-y}}{1 + 2^{y-x}} = 4 \Rightarrow x - y = ?$$

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

گویا کردن مخرج کسرها

برای گویا کردن کسرها معمولا از دو اتحاد مزدوج یا تفاضل یا مجموع مکعبات (چاق و لاغر) استفاده می‌کنیم. باید توجه داشته باشیم که این اتحادها را می‌توان به صورت‌های مختلفی نوشت برای مثال:

$$(a - b) = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$$

$$(a - b) = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})$$

$$(a + b) = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})$$

مثال ۲۵: کسرهای زیر را گویا کنید.

۱) $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} =$

۲) $\frac{8}{3\sqrt{2} + 4} =$

۳) $\frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} =$

۴) $\frac{h}{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}} =$

$$\delta) \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} =$$

$$\epsilon) \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-1} =$$

$$\zeta) \frac{2}{\sqrt[3]{5}+1} =$$

$$\eta) \frac{1}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4}} =$$

$$\theta) \frac{x+8}{\sqrt[3]{x}+2} =$$

$$۱۰) \frac{6}{2\sqrt[3]{2}-1} =$$

$$۱۱) \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} - \frac{1}{x-1} =$$

مثال ۲۶: اگر $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-4} = 3$ حاصل عبارت $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+4}$ را بدست آورید.

مثال ۲۷:

$$\frac{22}{5-\sqrt{3}} + \frac{4}{3-\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = ?$$

- A)1 B)4 C)6 D)8 E)12

مثال ۲۸:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} - \frac{2}{\sqrt{2}} = ?$$

- A) $\sqrt{2}$ B)-1 C)1 D) $\sqrt{2}-1$ E) $\sqrt{2}+1$

نکته: دامنه‌ی توابع با فرجه‌ی زوج:

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$D_f = \{x \mid g(x) \geq 0\}$$

مثال ۲۹:

$$x \in \mathbb{N}, A \in \mathbb{R}$$

$$A = \sqrt{8-2x} \Rightarrow \sum x = ?$$

مثال ۳۰:

$$x \in \mathbb{N}, A \in \mathbb{R}$$

$$A = \sqrt[4]{x-3} - \sqrt{15-3x} \Rightarrow \sum x = ?$$

مثال ۳۱:

$$x \in \mathbb{Z}, A \in \mathbb{R}$$

$$A = \frac{4x^2 + 3 + \sqrt{2x-3} + \sqrt[4]{3-2x}}{2x} \Rightarrow A = ?$$

رادیکال‌های دنباله‌دار

مثال ۳۲:

$$۱) \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\dots}}}}} =$$

$$۲) \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} =$$

$$۳) \sqrt[3]{16 \cdot \sqrt[3]{16 \cdot \sqrt[3]{16 \dots}}} =$$

$$۴) \sqrt{125 : \sqrt{125 : \sqrt{125 \dots}}} =$$

$$۵) (\sqrt[6]{8\sqrt[6]{8\sqrt[6]{8\dots}}})(\sqrt[4]{4:\sqrt[4]{4:\sqrt[4]{4\dots}}}) =$$

$$۶) \sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-\dots}}} =$$

$$a = \sqrt[4]{8} \quad b = \sqrt[3]{4} \quad , \quad c = \sqrt[12]{128}$$

$$\Rightarrow ? < ? < ?$$

A) $b < a < c$

B) $c < a < b$

C) $a < b < c$

D) $c < b < a$

E) $b < c < a$

$$\left. \begin{array}{l} a = \sqrt{9} + \sqrt{6} \\ b = \sqrt{10} + \sqrt{5} \\ c = \sqrt{8} + \sqrt{7} \end{array} \right\} \Rightarrow ? < ? < ?$$

A) $a < b < c$

B) $b < a < c$

C) $c < b < a$

D) $b < c < a$

E) $c < a < b$

مثال ۳۵:

$$x, y \in \mathbb{R}$$

$$x\sqrt{2} + y\sqrt{3} = \frac{\sqrt{6} + 1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x + y = ?$$

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{5}{2}$

مثال ۳۶:

$$\left. \begin{array}{l} 4a - b = 60 \\ 2\sqrt{a} - \sqrt{b} = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow a + b = ?$$

A)20 B)30 C)40 D)50 E)60

مثال ۳۷:

$$a > 2$$

$$a^2 - 4a + 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{a^4 + 4}{12a^2}} = ?$$

- A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

مثال ۳۸:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{ab}{c} = 4 \\ \frac{ac}{b} = 3 \\ \frac{bc}{a} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{a^2 + c^2 + 1} = ?$$

- A)2 B)3 C)4 D)5 E)6